Derivadas de $\mathbf{c_v}$: $\partial \mathbf{c_v}/\partial \mathbf{v}|_\mathbf{p}, \partial \mathbf{c_v}/\partial \mathbf{p}|_\mathbf{v}$

Vamos a deducir estas derivadas de c_v, respecto a v y a p en función de derivadas que puedan obtenerse a partir de la ecuación de estado.

Una vía posible es partir de la definición, a saber,

$$c_v = T\,\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v \tag{1}$$

a.- $\partial \mathbf{c_v}/\partial \mathbf{v}|_\mathbf{T}$

Derivando en (1) $\partial/\partial v|_T$ resulta

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = T\,\frac{\partial}{\partial v|_T}\left(\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v\right) = T\,\frac{\partial}{\partial T|_v}\left(\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T\right) \tag{2}$$

Ahora bien, la derivada $\partial s/\partial v|_T$ se obtiene de una de las relaciones de Maxwell: $\partial s/\partial v|_T = \partial p/\partial T|_v$. Por tanto,

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = T\,\left.\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right|_v \tag{3}$$

b.- $\partial \mathbf{c_v}/\partial \mathbf{p}|_\mathbf{T}$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial p}\right|_T = T\,\frac{\partial}{\partial p|_T}\left(\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v\right) = -T\frac{\partial^2 v}{\partial T|_p\,\partial T|_v} \tag{4}$$